

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00048250

Comitato Nazionale per l'Energia Nucleare
ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Sezione di Pisa
65/2

INFN/TC - 65/5
2 Aprile 1965

F Uccelli e E Zanazzi: UNALENTE A CAMPO QUADRUPOLARE
ELICOIDALE PULSATO PER IL FOCHEGGIAMENTO DI PARTI-
CELLE CARICHE - Parte I^a: CONDIZIONI DI TRASPORTO E DI
FOCHEGGIAMENTO ABERRAZIONE CROMATICA.

(*)
F. Uccelli e E. Zanazzi: UNALENTE A CAMPO QUADRUPOLARE ELICOIDALE PULSATO PER IL FOCHEGGIAMENTO DI PARTICELLE CARICHE; Parte 1^o: Condizioni di trasporto e di focheggiamento. Aberrazione cromatica.

INTRODUZIONE

I vantaggi di una lente a campo quadrupolare elicoidale^(1, 2, 3) rispetto ad un comune doppietto (o tripletto) di quadrupoli, consistono essenzialmente nella forte accettazione, dovuta all'azione continua del campo magnetico, nella possibilità di ottenere immagini con ingrandimento orizzontale e verticale unitario (condizione ottenibile, nei sistemi ordinari, solo con un tripletto), nel percorso sorgente-immagine, che, a parità di gradiente e di angolo solido, risulta solitamente molto breve.

Queste caratteristiche sarebbero di per sé sufficienti a permettere l'effettuazione di una serie di esperienze non agevolmente eseguibili con i sistemi ordinari (quali ad esempio quelle in cui necessitano fasci secondari estremamente intensi, o le esperienze su particelle di corta vita media, ecc.) e quindi per assicurare un buon successo a questi particolari sistemi di focheggiamento forte, se non si presentassero notevolissime difficoltà di realizzazione pratica (basti pensare ai poli di ferro a sviluppo elicoidale, e alle relative bobine da avvolgervi).

Per queste ragioni abbiamo pensato che la lente quadrupolare elicoidale sia effettivamente utilizzabile solo nella sua versione senza ferro (applicando le idee di Panofsky⁽⁴⁾ e di Septier⁽⁵⁾) e possibilmente in regime pulsato. Quest'ultima condizione ovvia infatti il notevole dispendio di energia di una lente statica⁽⁶⁾ e rende nel contempo raggiungibili alti gradienti di campo magnetico.

(*) - Laureando presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Firenze.

2.

EQUAZIONI DELLE TRAIETTORIE DI UNA PARTICELLA CARICA ALLO INTERNO DI UN QUADRUPOLO ELICOIDALE.

Come è noto⁽⁷⁾, le componenti di un campo quadrupolare, espresse in coordinate cilindriche con l'asse z coincidente l'asse ottico, (v. Fig. 1), sono:

$$\begin{aligned} B_r &= -ar \sin 2\theta \\ B_\theta &= -ar \cos 2\theta \\ B_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

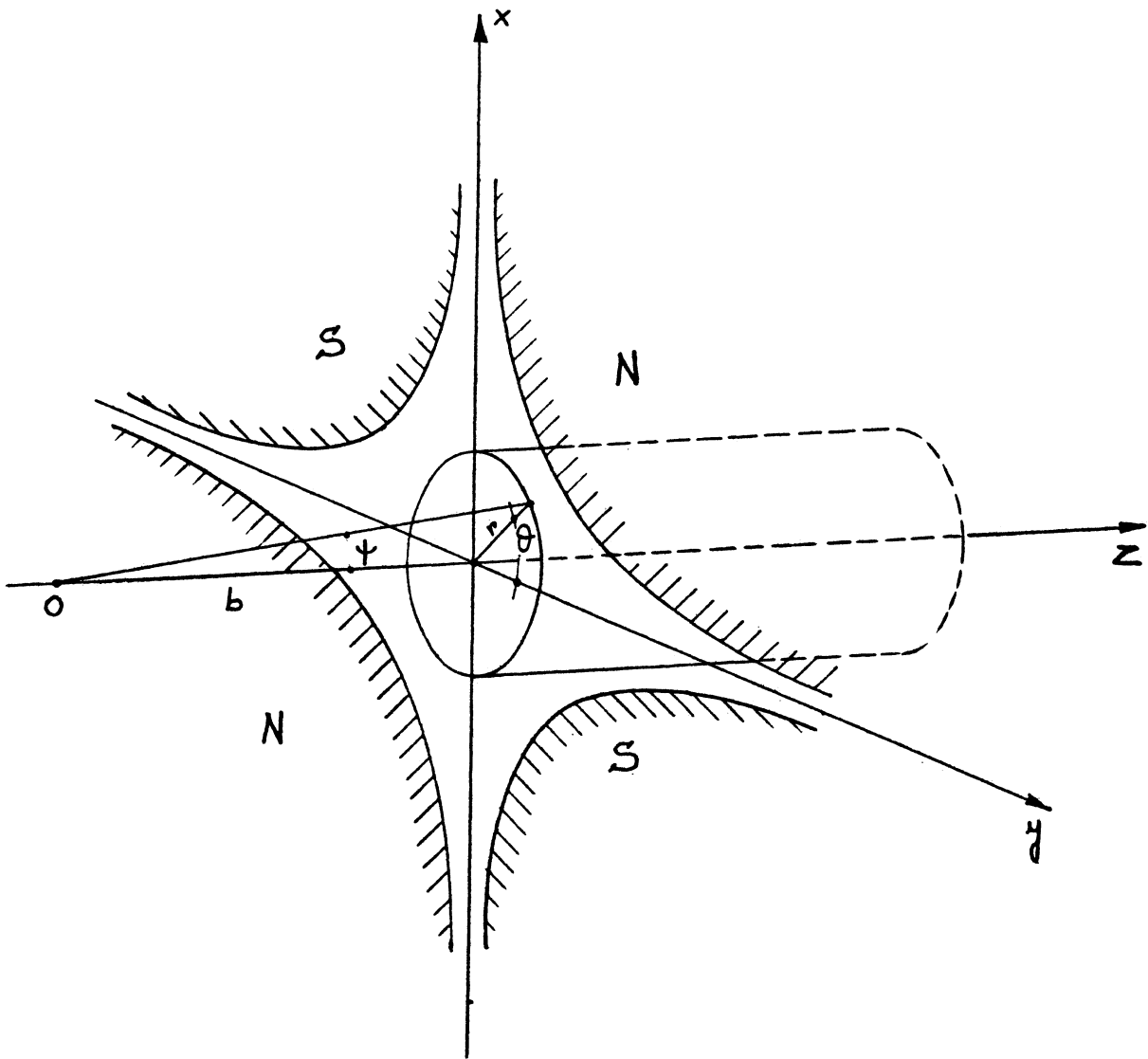


FIG. 1

avendo indicato con a il gradiente (costante) del campo magnetico.

Nel caso di campo quadrupolare elicoidale di passo L , varranno le stesse equazioni se sostituiremo l'argomento 2θ con $2(\theta + 2\pi z/L)$.

Assumendo ancora, in prima approssimazione, $B_z = 0$, e $\dot{z} = \text{co}$ stante (traiettorie parassiali), le equazioni di moto di una particella di carica e , all'interno del suddetto campo, sono:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 &= \frac{ea}{m} \dot{z} r \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{L} z \right) \\ r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} &= - \frac{ea}{m} \dot{z} r \sin 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{L} z \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Introduciamo per semplicità un sistema di coordinate cartesiane rotanti in cui:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= r \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{L} z \right) \\ \underline{y} &= r \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{L} z \right) \\ \underline{z} &= z \end{aligned} \quad (3)$$

Le equazioni (2) divengono, allora:

$$\begin{aligned} \underline{x}'' + 2 \omega \underline{y}' - \omega_2^2 \underline{x} &= 0 \\ \underline{y}'' - 2 \omega \underline{x}' - \omega_1^2 \underline{y} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \frac{dx}{dz} & \underline{y}' &= \frac{dy}{dz} \\ \omega &= \frac{2\pi}{L} & k &= \frac{ea}{p} \\ \omega_1^2 &= \omega^2 - k & \omega_2^2 &= \omega^2 + k \end{aligned} \quad (5)$$

Il sistema (4) ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \omega_1 C_1 \sin \omega_1 z + \omega_1 C_2 \cos \omega_1 z + \omega C_3 \sin \omega_2 z + \omega C_4 \cos \omega_2 z \\ \underline{x}' &= \omega_1^2 C_1 \cos \omega_1 z - \omega_1^2 C_2 \sin \omega_1 z + \omega \omega_2 C_3 \cos \omega_2 z - \omega \omega_2 C_4 \sin \omega_2 z \\ \underline{y} &= -\omega C_1 \cos \omega_1 z + \omega C_2 \sin \omega_1 z - \omega_2 C_3 \cos \omega_2 z + \omega_2 C_4 \sin \omega_2 z \\ \underline{y}' &= \omega \omega_1 C_1 \sin \omega_1 z + \omega \omega_1 C_2 \cos \omega_1 z + \omega_2^2 C_3 \sin \omega_2 z + \omega_2^2 C_4 \cos \omega_2 z \end{aligned} \quad (6)$$

In cui C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti di integrazione. Esprimendole in funzione delle coordinate $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ e delle inclinazioni $(\underline{x}'_0, \underline{y}'_0)$ delle traiettorie all'ingresso del quadrupolo, avremo:

4.

$$\begin{aligned}
 \underline{x} &= \underline{x}_0 \left(\frac{\omega_2^2}{k} \cos \omega_1 z - \frac{\omega^2}{k} \cos \omega_2 z \right) + \underline{x}'_0 \left(\frac{\omega^2}{k \omega_2} \sin \omega_2 z - \frac{\omega_1}{k} \sin \omega_1 z \right) + \\
 &+ \underline{y}_0 \left(\frac{\omega \omega_1^2}{k \omega_2} \sin \omega_2 z - \frac{\omega \omega_1}{k} \sin \omega_1 z \right) + \underline{y}'_0 \left(\frac{\omega}{k} \cos \omega_2 z - \frac{\omega}{k} \cos \omega_1 z \right) \\
 \underline{x}' &= \underline{x}_0 \left(-\frac{\omega^2 \omega_2}{k} \sin \omega_2 z - \frac{\omega_1 \omega_2^2}{k} \sin \omega_1 z \right) + \underline{x}'_0 \left(-\frac{\omega^2}{k} \cos \omega_2 z - \frac{\omega_1^2}{k} \cos \omega_1 z \right) + \\
 &+ \underline{y}_0 \left(\frac{\omega \omega_1^2}{k} \cos \omega_2 z - \frac{\omega \omega_2^2}{k} \cos \omega_1 z \right) + \underline{y}'_0 \left(\frac{\omega \omega_1}{k} \sin \omega_1 z - \frac{\omega \omega_2}{k} \sin \omega_2 z \right) \\
 \underline{y} &= \underline{x}_0 \left(\frac{\omega \omega_2^2}{k \omega_1} \sin \omega_1 z - \frac{\omega \omega_2}{k} \sin \omega_2 z \right) + \underline{x}'_0 \left(\frac{\omega}{k} \cos \omega_1 z - \frac{\omega}{k} \cos \omega_2 z \right) + \\
 &+ \underline{y}_0 \left(-\frac{\omega^2}{k} \cos \omega_1 z - \frac{\omega_1^2}{k} \cos \omega_2 z \right) + \underline{y}'_0 \left(-\frac{\omega_2}{k} \sin \omega_2 z - \frac{\omega_2^2}{k \omega_1} \sin \omega_1 z \right) \\
 \underline{y}' &= \underline{x}_0 \left(\frac{\omega \omega_2^2}{k} \cos \omega_1 z - \frac{\omega \omega_2^2}{k} \cos \omega_2 z \right) + \underline{x}'_0 \left(\frac{\omega \omega_2}{k} \sin \omega_2 z - \frac{\omega \omega_1}{k} \sin \omega_1 z \right) + \\
 &+ \underline{y}_0 \left(-\frac{\omega_1^2 \omega_2}{k} \sin \omega_2 z - \frac{\omega^2 \omega_1}{k} \sin \omega_1 z \right) + \underline{y}'_0 \left(-\frac{\omega_2^2}{k} \cos \omega_2 z - \frac{\omega^2}{k} \cos \omega_1 z \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Queste soluzioni sono finite purché $\omega^2 \geq |k|$. Da ciò segue che le traiettorie delle particelle di impulso $p < eaL^2/4\pi^2$ sono divergenti, e, per quadrupoli sufficientemente lunghi vengono intercettate dalle pareti.

CONDIZIONI DI FOCHEGGIAMENTO.

Supponiamo ora di porre sull'asse z , esternamente al quadrupolo e a distanza b una sorgente 0 puntiforme di particelle. In corrispondenza del piano d'entrata, e con riferimento al sistema di coordinate cartesiane indicate in Fig. 1, potremo scrivere:

$$b x' = x \tag{8}$$

$$b y' = y$$

Poiché tra detto sistema e quello definito dalle (4) sussiste la ben nota relazione:

$$\begin{aligned}
 x &= \underline{x} \cos \omega z + \underline{y} \sin \omega z \\
 y &= \underline{x} \sin \omega z + \underline{y} \cos \omega z
 \end{aligned} \tag{9}$$

le (8) divengono

$$\begin{aligned}
 (\underline{x}' + \omega \underline{y} - \frac{\underline{x}}{b}) \cos \omega z &+ (\underline{y}' - \omega \underline{x} - \frac{\underline{y}}{b}) \sin \omega z = 0 \\
 -(\underline{x}' + \omega \underline{y} - \frac{\underline{x}}{b}) \sin \omega z &+ (\underline{y}' - \omega \underline{x} - \frac{\underline{y}}{b}) \cos \omega z = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Perché le (10) siano verificate, occorrerà che

$$\begin{aligned} \underline{x}' + \omega \underline{y} - \frac{\underline{x}}{b} &= 0 \\ \underline{y}' - \omega \underline{x} - \frac{\underline{y}}{b} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Le (11) divengono, sostituendovi i valori forniti dalle (6), e tenute presenti le (5):

$$\begin{aligned} C_1(bk \cos \omega_1 z + \omega_1 \text{sen } \omega_1 z) + C_2(\omega_1 \cos \omega_1 z - bk \text{sen } \omega_1 z) + \omega C_3 \text{sen } \omega_2 z + \omega C_4 \cos \omega_2 z &= 0 \\ \omega C_1 \cos \omega_1 z - \omega C_2 \text{sen } \omega_1 z + C_3(kb \text{sen } \omega_2 z + \omega_2 \cos \omega_2 z) + C_4(kb \cos \omega_2 z - \omega_2 \text{sen } \omega_2 z) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

dalle quali otteniamo, per $z = 0$:

$$\begin{aligned} bkC_1 + \omega_1 C_2 + \omega C_4 &= 0 \\ \omega C_1 + \omega_2 C_3 + bkC_4 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Ora, perché esista a distanza f dalla sezione terminale una immagine della sorgente, dovranno valere per $z = 1$ (lunghezza del quadrupolo) relazioni analoghe alle (12) per ogni traiettoria, e cioè:

$$\begin{aligned} C_1(fk \cos \omega_1 1 + \omega_1 \text{sen } \omega_1 1) + C_2(\omega_1 \cos \omega_1 1 - fk \text{sen } \omega_1 1) + \omega C_3 \text{sen } \omega_2 1 + \omega C_4 \cos \omega_2 1 &= 0 \\ \omega C_1 \cos \omega_1 1 - \omega C_2 \text{sen } \omega_1 1 + C_3(fk \text{sen } \omega_2 1 + \omega_2 \cos \omega_2 1) + C_4(fk \cos \omega_2 1 - \omega_2 \text{sen } \omega_2 1) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Le quattro costanti C_1, C_2, C_3, C_4 , che provengono dall'integrazione delle (4) sono, mediante le (13) esprimibili le condizioni imposte dalla sorgente puntiforme esterna, ridotte a due. Otterremo, eliminando per esempio C_2 e C_3 :

$$\begin{aligned} C_1 \left[\left(1 - \frac{b}{f}\right) k \cos \omega_1 1 + \left(\frac{\omega_1}{f} + \frac{bk^2}{\omega_1}\right) \text{sen } \omega_1 1 - \frac{\omega^2}{f \omega_2} \text{sen } \omega_2 1 \right] + \\ C_4 \left[-\frac{\omega}{f} \cos \omega_1 1 + \frac{k \omega}{\omega_1} \text{sen } \omega_1 1 - \frac{bk \omega}{f \omega_2} \text{sen } \omega_2 1 + \frac{\omega}{f} \cos \omega_2 1 \right] &= 0 \\ C_1 \left[-\frac{\omega}{f} \cos \omega_1 1 - \frac{bk \omega}{f \omega_1} \text{sen } \omega_1 1 - \frac{k \omega}{\omega_2} \text{sen } \omega_2 1 - \frac{\omega}{f} \cos \omega_2 1 \right] + \\ C_4 \left[-\frac{\omega^2}{f \omega_1} \text{sen } \omega_1 1 - \left(\frac{k^2 b}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{f}\right) \text{sen } \omega_2 1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right) k \cos \omega_2 1 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Dovendo le (15) valere per ogni traiettoria, cioè per ogni coppia di valori C_1, C_4 , occorrerà imporre:

6.

$$\begin{aligned}
 & K(1 - \frac{b}{f}) \cos \omega_1 l + (\frac{\omega_1}{f} + \frac{bk^2}{\omega_1}) \text{sen } \omega_1 l - \frac{\omega_2^2}{f \omega_2} \text{sen } \omega_2 l = 0 \\
 & - \frac{\omega_1}{f} \cos \omega_1 l + \frac{\omega_2}{f} \cos \omega_2 l + \frac{\omega_1 k}{\omega_1} \text{sen } \omega_1 l - \frac{b \omega_1 k}{f \omega_2} \text{sen } \omega_2 l = 0 \\
 & \frac{\omega_1}{f} \cos \omega_1 l - \frac{\omega_2}{f} \cos \omega_2 l + \frac{bk \omega_1}{f \omega_1} \text{sen } \omega_1 l - \frac{\omega_1 k}{\omega_2} \text{sen } \omega_2 l = 0 \\
 & k(1 - \frac{b}{f}) \cos \omega_2 l + \frac{\omega_2^2}{f \omega_1} \text{sen } \omega_1 l - (\frac{\omega_2}{f} + \frac{bk^2}{\omega_2}) \text{sen } \omega_2 l = 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Le (16) costituiscono un sistema lineare omogeneo nelle incognite $\cos \omega_1 l$, $\cos \omega_2 l$, $\text{sen } \omega_1 l$, $\text{sen } \omega_2 l$, che ammetterà soluzione solo se il determinante dei coefficienti è nullo. Eseguendo i calcoli, potremo vedere che ciò è verificato solo se

$$f = \pm b$$

Se $f = +b$, avremo una immagine virtuale interna al quadrupolo.

Se $f = -b$, l'immagine è reale ed esterna: il quadrupolo elicoidale si comporta in questo caso come un sistema simmetrico ad ingrandimento unitario.

FOCHEGGIAMENTO VIRTUALE

Ponendo, come abbiamo detto, nelle (16) $f = b$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_1 k}{\omega_1} \text{sen } \omega_1 l - \frac{\omega_2 k}{\omega_2} \text{sen } \omega_2 l = 0 \\
 & \frac{\omega_1}{f} \cos \omega_1 l - \frac{\omega_2}{f} \cos \omega_2 l = 0
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Manifestamente le (17) sono soddisfatte solo se

$$\cos \omega_1 l = \cos \omega_2 l = \pm 1 \tag{18}$$

le quali, poste nelle (7) danno:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_0 &= \pm \underline{x}_1 \\
 \underline{y}_0 &= \pm \underline{y}_1 \\
 \underline{x}'_0 &= \pm \underline{x}'_1 \\
 \underline{y}'_0 &= \pm \underline{y}'_1
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Le (19) mostrano che le particelle escono dal quadrupolo con le medesime condizioni di ingresso, a parte la rotazione di un angolo $\alpha = 2\pi l/L$, ovvero $\alpha + \pi$.

Per ottenere le caratteristiche l, L, k del quadrupolo, potremo scrivere, per le (18):

$$\begin{aligned}\omega_1 l &= n \pi \\ \omega_2 l &= m \pi\end{aligned}\quad (20)$$

con n, m interi, ambedue pari o ambedue dispari, a seconda del segno scelto nelle (18).

Le (20), per le (5), diventano:

$$\begin{aligned}kl^2 &= m^2 \pi^2 - \alpha^2 \\ kl^2 &= -(n^2 \pi^2 - \alpha^2)\end{aligned}\quad (21)$$

che forniscono le condizioni geometriche e di funzionamento del quadrupolo.

Dalle (21) si ottiene:

$$k = \frac{n^2 - m^2}{2} \frac{\pi^2}{l^2}\quad (22)$$

$$\alpha = \pi \left(\frac{m^2 + n^2}{2} \right)^{1/2}\quad (23)$$

Dovendo essere $k \neq 0$, occorrerà che sia $m \neq n$. Ne segue:

$$n = 2h + m$$

con $h = 1, 2, 3, \dots$; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

In Fig. 1 riportiamo k in funzione di l secondo la (22) per alcuni α compatibili con la (23).

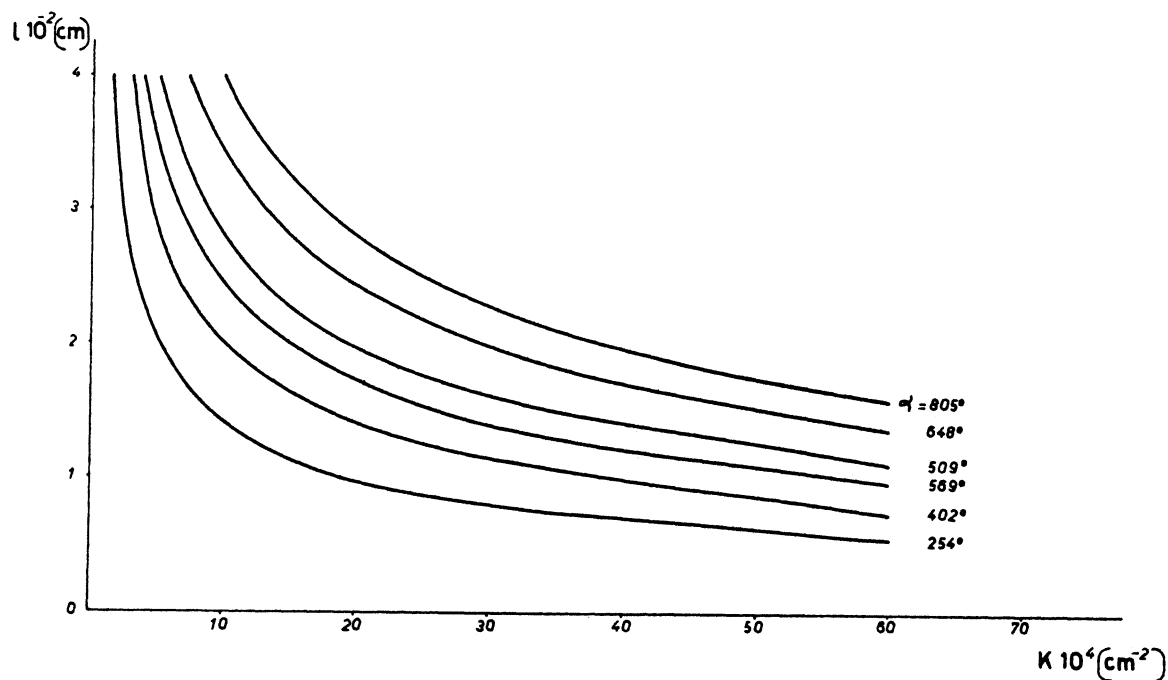


FIG. 2

FOCHEGGIAMENTO REALE

Ponendo nelle (16) $f = -b$, le equazioni indipendenti diventano tre sole, e le soluzioni per $\cos \omega_1 l$, $\cos \omega_2 l$, $\sin \omega_1 l$, $\sin \omega_2 l$ sono proporzionali ai minori del determinante dei coefficienti. Avremo quindi, indicando con Q il fattore di proporzionalità:

$$\begin{aligned}\sin \omega_1 l &= -2Q \frac{\omega_1}{b} \left(k + \frac{1}{b^2}\right) \\ \sin \omega_2 l &= 2Q \frac{\omega_2}{b} \left(k - \frac{1}{b^2}\right) \\ \cos \omega_1 l &= Q \left[\frac{2\omega_1^2}{b^2} - \left(k + \frac{1}{b^2}\right)^2 \right] \\ \cos \omega_2 l &= Q \left[\frac{2\omega_2^2}{b^2} - \left(k - \frac{1}{b^2}\right)^2 \right]\end{aligned}\tag{24}$$

Dalla condizione $\cos^2 \omega_1 l + \sin^2 \omega_1 l = 1$ (ovvero $\cos^2 \omega_2 l + \sin^2 \omega_2 l = 1$) risulta:

$$Q = \left(k^4 - \frac{2k^2}{b^4} + \frac{1}{b^8} + \frac{4\omega^4}{b^4}\right)^{-1/2}\tag{25}$$

Sostituendo la (25) nelle prime due (24), e tenendo conto della (5), potremo scrivere le condizioni di focheggiamento

$$\begin{aligned}\sin \left[\left(\frac{4\pi^2}{L^2} - k \right)^{1/2} l \right] &= \frac{2 \left(\frac{4\pi^2}{L^2} - k \right)^{1/2} \left(\frac{1}{b^2} + k \right)}{b \left[\left(k^2 - \frac{1}{b^4} \right)^2 + \left(\frac{8\pi^2}{L^2 b^2} \right)^2 \right]^{1/2}} \\ \sin \left[\left(\frac{4\pi^2}{L^2} + k \right)^{1/2} l \right] &= \frac{2 \left(\frac{4\pi^2}{L^2} + k \right)^{1/2} \left(\frac{1}{b^2} - k \right)}{b \left[\left(k^2 - \frac{1}{b^4} \right)^2 + \left(\frac{8\pi^2}{L^2 b^2} \right)^2 \right]^{1/2}}\end{aligned}\tag{26}$$

notiamo che ponendo nelle (26)

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\pi l}{L} \\ \beta &= k^{1/2} l \\ \gamma &= \frac{1}{b}\end{aligned}$$

le (26) divengono:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} &= \frac{2\gamma(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}(\gamma^2 + \beta^2)}{[(\beta^4 - \gamma^4)^2 + 4\alpha^4\gamma^4]^{1/2}} \\ \operatorname{sen}(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} &= \frac{2\gamma(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}(\gamma^2 - \beta^2)}{[(\beta^4 - \gamma^4)^2 + 4\alpha^4\gamma^4]^{1/2}} \end{aligned} \quad (27)$$

Le (27) mostrano che le condizioni di foccheggiamento di un quadrupolo elicoidale dipendono dai soli parametri α, β, γ .

Notiamo inoltre che se il fascio di particelle entra nel quadrupolo parallelamente all'asse, dovrà uscirne pure parallelamente. Ciò appare chiaro dall'esame delle (26): per $b \rightarrow \infty$ esse si riducono, come è possibile vedere sviluppando il limite, alle (22).

Nelle Figg. 3 e 4 abbiamo riportato i valori di k, l, α, b valutati dalle (26) per mezzo di una calcolatrice elettronica.

ABERRAZIONE CROMATICA

Consideriamo il piano immagine $z = b$ delle particelle con impulso nominale p , e proponiamoci di trovare a che distanza dall'asse z passano le particelle aventi impulso variato.

Riferiamoci ad un sistema cartesiano x_1, y_1 fisso, ruotato dell'angolo $\alpha = 2\pi l/L$ rispetto a quello di Fig. 1. Sul piano immagine, le particelle aventi $\Delta p/p \neq 0$, avranno le coordinate

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_{11} + b \Delta x'_{11} \\ \Delta y_1 &= \Delta y_{11} + b \Delta y'_{11} \end{aligned} \quad (28)$$

ove $\Delta x_{11}, \Delta x'_{11}, \Delta y_{11}, \Delta y'_{11}$ sono le variazioni subite dalle coordinate e dalle inclinazioni in corrispondenza del piano d'uscita del quadrupolo. Le (28) espresse nel sistema x, y divengono, mediante relazioni analoghe alle (9):

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_1 + b \Delta x'_1 + b \omega \Delta y_1 \\ \Delta y_1 &= \Delta y_1 + b \Delta y'_1 - b \omega \Delta x_1 \end{aligned} \quad (29)$$

Esprimendo le condizioni di ingresso $\underline{x}_0, \underline{x}'_0, \underline{y}_0, \underline{y}'_0$ che compaiono nelle (7) in funzione degli angoli ψ e θ (v. Fig. 1), otteniamo:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= b \operatorname{tg} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \underline{x}'_0 &= \operatorname{tg} \psi \operatorname{sen} \theta - b \omega \operatorname{tg} \psi \operatorname{cos} \theta \\ \underline{y}_0 &= b \operatorname{tg} \psi \operatorname{cos} \theta \\ \underline{y}'_0 &= \operatorname{tg} \psi \operatorname{cos} \theta + b \omega \operatorname{tg} \psi \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (30)$$

10.

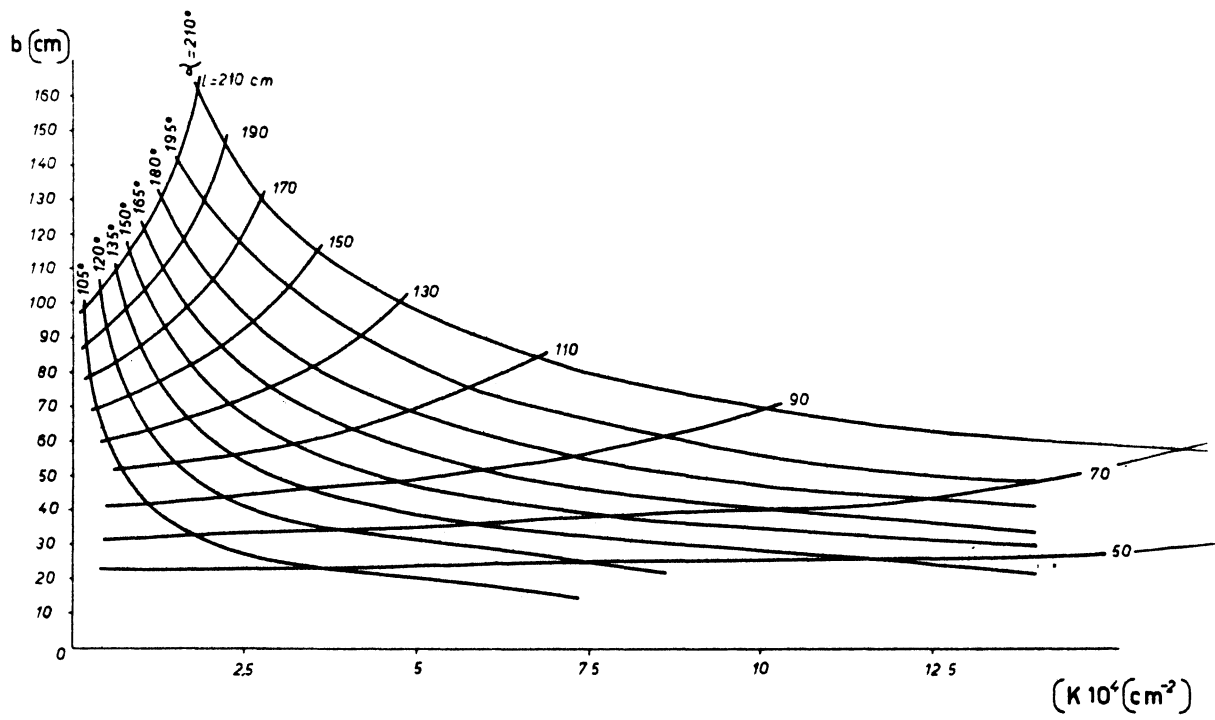


FIG. 3

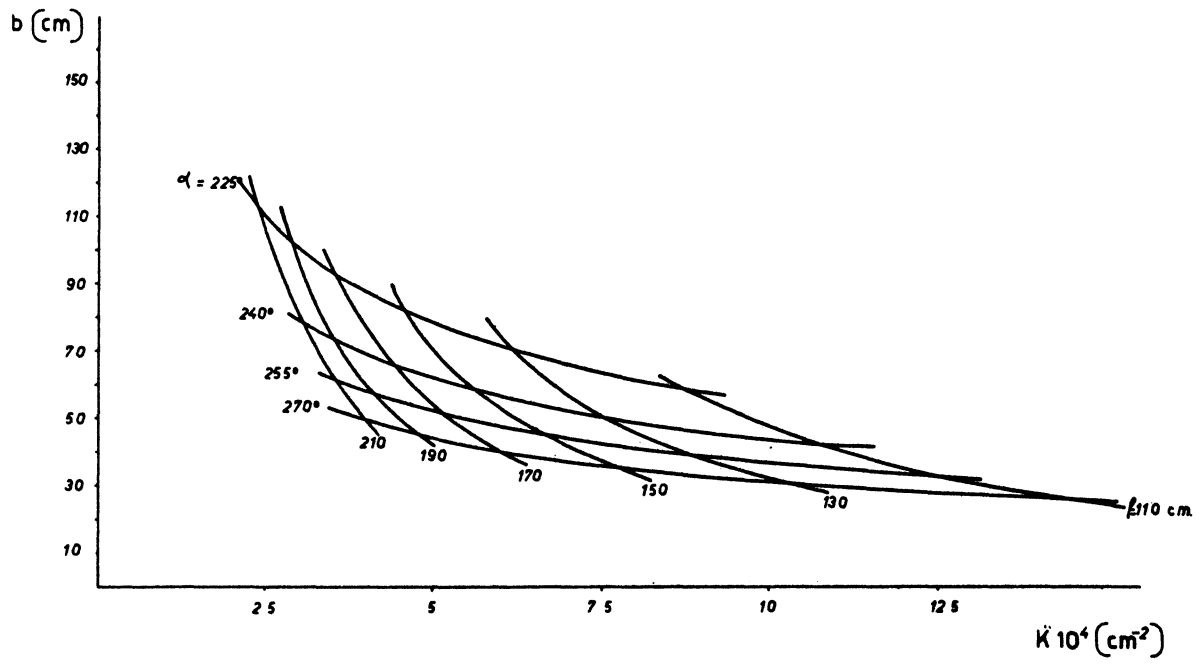


FIG. 4

Differenziando le (7) rispetto a p , otteniamo (per $z = 1$) $\Delta \underline{x}_1$, $\Delta \underline{y}_1$, $\Delta \underline{y}'_1$. Le (29) divengono così:

$$\Delta x_1 = U(\theta) \operatorname{tg} \psi \frac{\Delta p}{p}$$

$$\Delta y_1 = V(\theta) \operatorname{tg} \psi \frac{\Delta p}{p}$$

Riportiamo in appendice le espressioni di $U(\theta)$ e $V(\theta)$, nonché di $\Delta \underline{x}_1$, $\Delta \underline{y}_1$, $\Delta \underline{y}'_1$.

La traiettoria della particella di impulso variato intersecherà il piano $z = b$ a distanza

$$r = \left[U^2(\theta) + V^2(\theta) \right]^{1/2} \operatorname{tg} \psi \frac{\Delta p}{p} . \quad (32)$$

APPENDICE

$$\begin{aligned}
U(\theta) = & \cos\theta \left[-\frac{\omega}{k} - \frac{\omega \text{blk}}{2\omega_1^2} \right] \cos \omega_1 1 + \left(\frac{\omega_1}{2\omega_1} + \frac{\omega \text{bk}}{2\omega_1^3} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\omega}{k} + \frac{\omega^2 \text{bl}}{\omega_2^2} + \frac{\omega \text{blk}}{2\omega_2^2} \right) \cos \omega_2 1 + \\
& + \left(\frac{\omega_1}{2\omega_2} + \frac{\omega \text{bk}}{2\omega_2^3} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right] + \text{sen}\theta \left[-\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 \text{bl}}{2} + \frac{\text{b}^2 \text{lk}^2}{2\omega_1^2} \right] \cos \omega_1 1 - \\
& - \left(\frac{1}{2\omega_1} + \frac{\omega_1}{k} + \frac{\text{b}^2 \text{k}}{2\omega_1} + \frac{\omega_2^2 \text{bl}}{2\omega_1} + \frac{\omega^2 \text{b}^2 \text{k}}{2\omega_1^3} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(-\frac{\omega^2 1}{2\omega_2^2} + \frac{\omega^2 \omega_2^2 \text{b}}{k\omega_1} - \frac{\omega^2 \omega_2 \text{b}}{k} \right) \cos \omega_2 1 + \\
& + \left(\frac{\omega^2}{k\omega_2} + \frac{\omega^2}{2\omega_2^3} + \frac{\omega^2 \omega_2^2 \text{b}^2}{2\omega_1^3} + \frac{\omega^2 \omega_2 \text{b}^2}{k} - \frac{\omega^2 \text{b}^2}{2\omega_2} + \frac{\omega^2 \text{b}^2}{\omega_1} - \frac{\omega^2 \omega_2^2 \text{b}^2}{k\omega_1} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\theta) = & \cos\theta \left[-\frac{\omega^2 1}{2\omega_1^2} \cos \omega_1 1 + \left(\frac{\omega^2}{2\omega_1^3} - \frac{\omega^2}{k\omega_1} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{b}^2 \text{lk}^2}{2\omega_2^2} \right) \cos \omega_2 1 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\text{blk}}{\omega_2} - \frac{1}{2\omega_2} + \frac{\omega_2}{k} + \frac{\text{b}^2 \text{k}^2}{2\omega_2^3} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right] + \text{sen}\theta \left[\left(\frac{\omega}{k} + \frac{\text{blk}\omega}{2\omega_1^2} \right) \cos \omega_1 1 + \right. \\
& + \left(-\frac{\omega_1}{2\omega_1} - \frac{\omega \text{b}}{2\omega_1^3} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{k\omega_1} - \frac{\omega \omega_2 \text{b}}{k} - \frac{\omega}{k} + \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}^2}{k} - \omega \text{b}^2 - \frac{\omega \omega_2^3 \text{b}^2}{k\omega_1} + \frac{3\omega \omega_2 \text{b}^2}{2\omega_1} \right. \\
& + \left. \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}^2}{2\omega_1^3} - \frac{\omega \text{blk}}{2} \right) \cos \omega_2 1 + \left(\frac{2\omega \omega_2 \text{b}}{k} - \frac{\omega \text{b}}{\omega_2} + \frac{2\omega \text{b}}{\omega_1} - \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{k\omega_1} + \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{2\omega_1^3} - \frac{\omega_1}{2\omega_2} \right. \\
& + \left. \frac{\omega \omega_2 \text{b}^2 1}{2} - \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}^2 1}{2\omega_1} - \frac{\omega^3 \text{b}}{k\omega_2} - \frac{\omega^3 \text{b}}{2\omega_2^3} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 = & \frac{\Delta p}{p} \text{tg} \psi \left\{ \text{sen}\theta \left[-\frac{1}{2} \cos \omega_1 1 - \left(\frac{\text{blk}}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} + \frac{\omega_1}{k} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\omega^2}{k\omega_2} + \frac{\omega^2}{2\omega_2^3} \right) \text{sen} \omega_2 1 - \frac{\omega^2 1}{2\omega_2^2} \cos \omega_2 1 \right] + \right. \\
& + \left. \cos\theta \left[-\frac{\omega}{k} \cos \omega_1 1 + \frac{\omega_1}{2\omega_1} \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\omega_1}{2\omega_2} + \frac{\omega \text{bk}}{2\omega_2^3} \right) \text{sen} \omega_2 1 + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{\omega \text{blk}}{2\omega_2^2} \right) \cos \omega_2 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_1' = & \frac{\Delta p}{p} \text{tg} \psi \left\{ \text{sen}\theta \left[\left(\frac{\omega_1 1}{2} - 1 - \frac{\omega_1^2}{k} - \frac{\text{blk}}{2} \right) \cos \omega_1 1 - \frac{\text{bk}}{2\omega_1} \text{sen} \omega_1 1 + \frac{\omega^2 1}{2\omega_2} \text{sen} \omega_2 1 + \frac{\omega^2}{k} \cos \omega_2 1 \right] + \right. \\
& + \left. \cos\theta \left[-\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \cos \omega_1 1 + \left(\frac{\omega}{2\omega_1} + \frac{\omega \omega_1}{k} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \frac{\omega_1}{2} \cos \omega_2 1 + \left(\frac{\omega}{2\omega_2} - \frac{\omega \omega_2}{k} - \frac{\omega \text{blk}}{2\omega_2} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 = & \frac{\Delta p}{p} \text{tg} \psi \left\{ \text{sen}\theta \left[\left(\frac{\omega}{k} + \frac{\omega \text{blk}}{2\omega_1^2} \right) \cos \omega_1 1 + \left(\frac{\omega_1}{2\omega_1} + \frac{\omega \text{bk}}{2\omega_1^3} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{k\omega_1} - \frac{\omega \omega_2 \text{b}}{k} - \frac{\omega}{k} \right) \cos \omega_2 1 + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{\omega \omega_2 \text{b}}{k} - \frac{\omega \text{b}}{2\omega_2} + \frac{2\omega \text{b}}{\omega_1} - \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{k\omega_1} + \frac{\omega \omega_2^2 \text{b}}{2\omega_1^3} - \frac{\omega_1}{2\omega_2} \right) \text{sen} \omega_2 1 \right] + \cos\theta \left[-\frac{\omega^2 1}{2\omega_1^2} \cos \omega_1 1 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\omega^2}{2\omega_1^3} - \frac{\omega^2}{k\omega_1} \right) \text{sen} \omega_1 1 + \left(\frac{\text{blk}}{2\omega_2} - \frac{1}{2\omega_2} + \frac{\omega_2}{k} \right) \text{sen} \omega_2 1 + \frac{1}{2} \cos \omega_2 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\Delta Y_1' = \frac{\Delta p}{p} \operatorname{tg} \varphi \left\{ \operatorname{sen} \theta \left[-\frac{\omega_1 b}{2} \cos \omega_1 l - \left(\frac{\omega \omega_1}{k} + \frac{\omega}{2 \omega_1} + \frac{\omega b k}{2 \omega_1} \right) \operatorname{sen} \omega_1 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\omega \omega_2^2 b}{k} - \omega b - \frac{\omega \omega_2^3 b}{k \omega_1} + \frac{3 \omega \omega_2 b}{2 \omega_1} + \frac{\omega \omega_2^2 b}{2 \omega_1^3} - \frac{\omega_1}{2} \right) \cos \omega_2 l + \left(\frac{\omega \omega_2}{k} - \frac{\omega}{2 \omega_2} + \frac{\omega \omega_2 b l}{2} - \frac{\omega \omega_2^2 b l}{2 \omega_1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \operatorname{sen} \omega_2 l \right] + \cos \theta \left[-\frac{\omega^2}{k} \cos \omega_1 l + \frac{\omega_1^2}{2 \omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 l + \left(\frac{\omega_2^2}{k} - 1 - \frac{b k}{2} \right) \cos \omega_2 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{b k}{2 \omega_2} + \frac{\omega_2 l}{2} \right) \operatorname{sen} \omega_2 l \right] \right\} .$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - G. Sacerdoti e F. Uccelli, Alcune proprietà del quadrupolo elicoidale, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 96, (1961-62).
- (2) - M. Morpurgo et A. Septier, Etude expérimentale de lentille quadrupolaires hélicoidales, Comptes Rendus 245, (1957).
- (3) - G. Sacerdoti, Calcolo dell'accettanza massima di un quadrupolo elicoidale infinitamente lungo, Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-61/63, (1961).
- (4) - L. N. Hand and W. K. H. Panofsky, Magnetic quadrupole with rectangular aperture, Stanford, HEPL, 169.
- (5) - A. Septier, Les lentilles magnétiques quadrupolaires sans fer: réalisation de répartitions d'induction à gradient constant, CERN 60-6 (1960).
- (6) - S. Van Der Meer, Comparison between quadrupole lenses of classical design and "Panofsky lenses", CERN PS/Int. MM 59-8, (1959).
- (7) - F. Krienen, Helical lenses, CERN 57-58 (1957).
